۱. برای متغیرهای تصادفی X و Y داریم:

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر تابع چگالی حاشیه‌ای X برابر با $f_X(x) = 3x^2 \ : 0 < x < 1$ باشد،

الف) تابع چگالی شرطی $f_X(x|y)$ را به دست آورید.

ب) امید ریاضی $E[X|Y]$ را محاسبه کنید.

پ) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = Y/X$ را به دست آورید.

۲. تابع چگالی احتمال $f_X(x) = \theta^2 x^{\theta-1}(1-x) \ : \ \theta > 0 \ , \ 0 < x < 1$ را در نظر بگیرید.

الف) یک تخمینگر ML برای پارامتر θ پیدا کنید.

ب) آیا تخمینگر محاسبه شده در بخش الف یک تخمینگر پایدار است؟ چرا؟

۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند.

الف) تابع چگالی احتمال شرطی $P(X|X+Y=t)$ را پیدا کنید.

ب) امید ریاضی شرطی $E[X|X+Y]$ را محاسبه کنید.

پ) تحت چه شرطی روی λ_1 و λ_2، تابع چگالی احتمال شرطی بخش الف توزیع یکنواخت در بازه $(0,t)$ خواهد داشت؟

۴. یک سکه سالم را n بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید Y تعداد شیرهای مشاهده‌شده در این n پرتاب باشد. در آزمایش دیگری به طور مستقل، همان سکه را $2Y$ بار پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد کل شیرها در مجموع دو آزمایش باشد، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید.

۵. یک دیتاسنتر دارای n سرور مستقل است. تعداد درخواست‌هایی که در یک روز به این دیتاسنتر می‌رسد، یک متغیر تصادفی گسسته و نامنفی به نام X است که تابع مولد گشتاور آن برابر است با $M_X(s) = E[e^{sX}]$. هر درخواست به‌صورت مستقل یک سرور را برای پردازش انتخاب می‌کند، و احتمال انتخاب سرور i-ام برابر با p_i است: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. اگر حداقل یک درخواست به یک سرور برسد، آن سرور در آن روز «فعال» محسوب می‌شود. امید ریاضی تعداد سرورهای فعال در یک روز را به دست آورید.

۶. (سوال امتیازی) یک شرکت فناوری، دو الگوریتم جستجوی متفاوت A و B را روی یک مجموعه داده آزمایش می‌کند. در یک آزمایش تصادفی، ۱۲۰۰ جستجو با الگوریتم A و ۱۵۰۰ جستجو با الگوریتم B انجام شده است. برای هر جستجو، نتیجه یا موفقیت‌آمیز است و یا ناموفق. الگوریتم A ۹۶۰ موفقیت و الگوریتم B ۱۲۰۰ موفقیت به دست آورده‌اند.

الف) فرض کنید هدف بررسی این است که احتمال موفقیت الگوریتم‌ها یکسان است. آزمون فرض مناسب را طراحی کنید.

ب) آماره آزمون را محاسبه کرده و نتیجه را با سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$ تفسیر کنید.

پ) یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای اختلاف احتمال موفقیت دو الگوریتم بسازید.